b) On a : $U'(x)=0 \Rightarrow U(x)=cte=U(0)$

Or $U(0)=F(1)+F(0)=\frac{\pi}{4}+0=\frac{\pi}{4}$

Donc : $\forall x\in[0,+\infty[: \boxed{U(x)=\frac{\pi}{4}}$

On a : $F\left(\frac{1}{2}\right)+F\left(\frac{1}{3}\right)=U(1)=\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \boxed{F\left(\frac{1}{2}\right)+F\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{4}}$

Partie B :

$g(x)=-f(x)$

1) $f(x)=-g(x)$ donc d'après 1) partie A

$(-g(x))$ admet une unique primitive **G** sur $[0,+\infty[$ telle que $G(0)=0$.

Comme F est une primitive de $f=-g$

Alors $-F$ est une primitive de g donc $\boxed{G=-F}$

2) $T(x)=G(cotgx)$

a)*/ $x\mapsto cotgx$ est dérivable pour $x\neq k\pi$; k∈ℤ

Donc dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

$cotg\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=[0,+\infty[$ et G dérivable sur $[0,+\infty[$.

D'où T est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$

*/

$$T'(x)=(cotgx)'\times G'(cotgx)$$
$$=(cotgx)'\times g(cotgx)$$
$$=(cotgx)'\times(-f(cotgx))$$
$$=-\left(1+cotg^2x\right)\times\frac{-1}{1+cotg^2x}=1$$

Donc $T'(x)=1$

b) $T'(x)=1\Rightarrow T(x)=x+cte$

Or $T\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+cte=G\left(cotg\frac{\pi}{2}\right)=G(0)=0$

$\Rightarrow cte=-\frac{\pi}{2}$, donc $\boxed{T(x)=x-\frac{\pi}{2}}; \forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$

*/ $G(1)=G\left(cotg\frac{\pi}{4}\right)=T\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \boxed{G(1)=-\frac{\pi}{4}}$

*/ $G\left(\sqrt{3}\right)=G\left(cotg\frac{\pi}{6}\right)=T\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \boxed{G\left(\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}}$

3) on pose $V(x)=G\left(\frac{1}{1+x}\right)+G\left(\frac{x}{x+2}\right)$, $x\in[0,+\infty[$

a) */ $x\mapsto\frac{1}{1+x}=h(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

et $h\left(]0,+\infty[\right)=]0,1]$ et G dérivable sur $]0,1]$. $\Rightarrow G\left(\frac{1}{1+x}\right)$ Dérivable sur $[0,+\infty[$.

*/ $x\mapsto\frac{x}{x+2}=h_1(x)$ est dérivable sur $[0,+\infty[$.

et $h_1\left([0,+\infty[\right)=[0,1[$ et G dérivable sur $[0,1[$

Donc $G\left(\frac{x}{x+2}\right)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

Conclusion :

V est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$V'(x)=\left(\frac{1}{1+x}\right)'G'\left(\frac{1}{1+x}\right)+\left(\frac{x}{x+2}\right)'G'\left(\frac{x}{x+2}\right)$$
$$=\frac{-1}{(1+x)^2}\times\left(-\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}\right)+\frac{2}{(x+2)^2}\times\left(\frac{-1}{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}\right)$$
$$=\frac{-1}{(1+x)^2}\times\left(-\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}\right)+\frac{2}{(x+2)^2}\times\left(\frac{-1}{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}\right)$$
$$=\frac{1}{(1+x)^2+1}-\frac{2}{(x+2)^2+x^2}$$
$$=\frac{1}{x^2+2x+2}-\frac{2}{2x^2+4x+4}$$
$$=\frac{1}{x^2+2x+2}-\frac{\not 2}{\not 2(x^2+2x+2)}=0 \Rightarrow V'(x)=0$$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn